Ορισμός (Δυϊκός του T)

Έστω X, Y νορμικοί και $T: X \to Y$ φραγμ. γραμμ. τελεστής. Για κάθε $f \in Y^*$ έχουμε ότι $f \circ T \in X^*$ (και αυτό γιατί σύνθεση γραμμικών είναι γραμμική και σύνθεση συνεχών είναι συνεχής). Συμβολίζουμε $T^*(f) = f \circ T$ με $T^*: Y^* \to X^*$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f \circ T"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

- T^* γραμμικός αφού

$T^*(\mu f_1+\lambda f_2) = (\mu f_1+\lambda f_2)\circ T =$

$= \mu f_1\circ T + \lambda f_2\circ T = \mu T^*(f_1)+\lambda T^*(f_2)$

- T^* φραγμένος ή συνεχής αφού

$\forall f\in\ ^* : \|T^*(f)\| = \|f\circ T\| \le \|f\|\cdot\|T\| \Rightarrow \|T^*\|\le\|T\|$

Νδο $\|T^*\|\ge\|T\|$

Αρκεί νδο $\forall x\in X$: $\|T(x)\|\le\|T^*\|\cdot\|x\|$

Έστω $x\in X$

Τότε $T(x)\in Y$ και από το πόρισμα του Θεωρήματος Hahn-Banach $\Rightarrow \exists f\in Y^*$: $\|f\|=1$ ώστε $f(T(x)) = \|T(x)\|$

Έτσι, $\|T(x)\| = f(T(x)) = (f\circ T)(x) = T^*(f)(x) \le$

$\le \|T^*(f)\|\cdot\|x\| \le \|T^*\|\cdot\cancel{\|f\|}\cdot\|x\| = \|T^*\|\,\|x\|$

Άρα, $\|T^*\|\ge\|T\|$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) T^* 1-1 ανν $T(X)$ είναι πυκνό στο Y

Απόδ.

Έστω $f\in\ker T^* \Leftrightarrow T^*(f)=0 \Leftrightarrow f\circ T = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f\circ T)(x)=0 \underset{\forall x\in X}{\Leftrightarrow} f(T(x))=0 \ \forall x\in X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f|_{T(X)}=0 \Leftarrow T^*$ 1-1 ανν $\ker T^*=\{0\}$

Δηλ. $\forall f\in Y^*$ με $f|_{T(X)}=0$ ισχύει $f=0 \Leftrightarrow$

$\overset{\text{Πρόταση}}{\underset{\text{Hahn-Banach}}{\Longleftrightarrow}}$ $T(X)$ πυκνός στον Y

Ορισμός Έστω $T:X\to Y$ γραμ. τελεστής νορμικών χώρων. Αν $T:X\to T(X)$ είναι ισομορφισμός (αντίστοιχα ισομετρικός ισομορφισμός) τότε ο $T:X\to Y$ λέγεται ισομορφική εμφύτευση (αντίστοιχα ισομετρική εμφύτευση). Τότε X εμφυτεύεται ισομορφικά στον Y

2) Αν T είναι (ισομετρική ή) ισομορφική εμφύτευση τότε ο T^* είναι επί

Απόδ.

Έχουμε ότι $T: X \to T(X)$ είναι ισομορφισμός

Άρα, $T^{-1}: T(X) \to X$ θα είναι φραγμένος γραμμ. τελ.

Θδο T^* επί $(T^*: Y^* \to X^*)$

Έστω τυχόν $g \in X^*$

Τότε $h = g \circ T^{-1}: T(X) \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Από το πόρισμα Hahn-Banach $\exists f \in Y^*$ ώστε το f να επεκτείνει το h

Τότε $f(T(x)) = h(T(x))$ $\forall x \in X \Rightarrow T^*(f)(x) =$
$= (g \circ T^{-1})(T(x)) \Rightarrow T^*(f)(x) = g(x)$ $\forall x \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow T^*(f) = g$

Κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}

Έστω X νορμικός χώρος τότε $\forall x \in X$ ορίζουμε $\tau(x): X^* \to \mathbb{R}$ με $\tau(x)(f) = f(x)$.

- $\tau(x)$ γραμμική (άμεσο)
- $\tau(x)$ φραγμένος

$\forall f \in X^*$: $|\tau(x)\cdot(f)| = f(x) \le \|f\|\cdot\|x\| = \|x\|\|f\|$

Άρα, $\tau(x)$ φραγμένος με $\|\tau(x)\| \le \|x\|$

Συνεπώς, $\tau(x) \in X^{**}$

Θδο $\|\tau(x)\| = \|x\|$ $(\Leftrightarrow \|x\| \le \|\tau(x)\|)$

Από το Πόρισμα του Θ.επ. Hahn-Banach

$\exists f \in X^*$: $\|f\| = 1$ ώστε $f(x) = \|x\|$

Έτσι $\|x\| = f(x) = \tau(x)(f) \le \|\tau(x)\|\cdot\|f\| =$
$= \|\tau(x)\|$.

Από τα παραπάνω ο $\tau: X \to X^{**}$ είναι ισομετρική εμφύτευση

Παρατήρηση

$\forall x \in X : \|x\| = \sup\{ f(x) : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$

Απόδ

Πράγματι, $\sup\{ f(x) : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} =$

$= \sup\{ \tau(x)(f) : f \in X^*, \|f\| \leq 1\} =$

$= \|\tau(x)\| = \|x\|$. (από πριν)

Ορισμός

Έστω X νορμικός χώρος
Ο X καλείται αυτοπαθής ή αναυτακλαστικός
Εάν η κανονική εμφύτευση από τον X στον X^{**}
$T: X \to X^{**}$ είναι επί.

Παρατηρήσεις

1) X αυτοπαθής ανν $\forall F \in X^{**}, \exists x \in X : \tau(x) = F$
$\Leftrightarrow \forall F \in X^{**}, \exists x \in X : \underbrace{\tau(x)(f)}_{= f(x)} = F(f), \forall f \in X^*$

2) X αυτοπαθής τότε $X \sim X^{**}$ όπου με το σύμβολο $\sim$ παριστάνουμε τον ισομετρικό ισομορφισμό
Δεν ισχύει το αντίστροφο (R.C. James κατασκεύασε ένα χώρο J για τον οποίο $J \sim J^{**}$ αλλά ο J δεν είναι αυτοπαθής)

3) Αν ο X αυτοπαθής τότε X χώρος Banach διότι $X \sim X^{**}$ και X^{**} πάντοι χώρος Banach

4) Ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι αυτοπαθής αφού γνωρίζουμε ότι $c_0(\mathbb{N})^{**} \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})$ και $c_0(\mathbb{N})$ διαχωρίσιμος ενώ $\ell^\infty(\mathbb{N})$ μη διαχωρίσιμος

5) $\ell^1(\mathbb{N})$ δεν είναι αυτοπαθής χώρος
$\ell^1(\mathbb{N})^* \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})$. και $\ell^\infty(\mathbb{N})$ μη διαχωρίσιμος
Άρα, $\ell^\infty(\mathbb{N})^*$ μη διαχωρίσιμος
Αλλά, είχαμε δείξει ότι αν X^* διαχωρίσιμος τότε και ο X διαχωρίσιμος
Τουτέστιν $\ell^1(\mathbb{N})^{**} \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})^* \to$ διαχωρίσιμος
Άρα, ο $\ell^1(\mathbb{N})$ ως διαχωρίσιμος δεν μπορεί να είναι ισόμορφος με τον $\ell^1(\mathbb{N})^{**}$

6) Για τον $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$ και $p: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
ξέραμε ότι $(\ell^p(\mathbb{N}))^{**} \simeq \ell^p(\mathbb{N})$ αλλά αυτό δεν αρκεί για να είναι αυτοπαθής ο $\ell^p(\mathbb{N})$
Θδο $T: \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})^{**}$ είναι επί
δηλ. θα είναι κανονική εμφύτευση.
Η γραμμική απεικόνιση
$T: \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^q(\mathbb{N})^*$ με τύπο όπως έχουμε δει
$T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x \in \ell^p(\mathbb{N})$, $\forall y = \ell^q(\mathbb{N})$
αυτός είναι ισομετρικός ισομορφισμός
Επίσης ο τελεστής $S: \ell^p(\mathbb{N})^* \to \ell^q(\mathbb{N})$ με
$S(f) = (f(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης ισομετρικός ισομορφισμός $\Rightarrow S^*: \ell^q(\mathbb{N})^* \to \ell^p(\mathbb{N})^{**}$
είναι ισομετρικός ισομορφισμός
Παίρνοντας τη σύνθεση $S^* \circ T: \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})^{**}$
ως σύνθεση ισομετρικών ισομορφισμών είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Μένει νδο $S^* \circ T$
είναι η κανονική εμφύτευση, δηλ. $S^* \circ T = \tau: \ell^p \to \ell^{p**}$

Έστω $x \in \ell^p(\mathbb{N})$

Θδο $(S^* \circ T)(x) = \tau(x)$

Έστω $f \in \ell^p(\mathbb{N})^*$ και Θδο $(S^* \circ T)(x)(f) = \tau(x)(f)$

$(S^* \circ T)(x)(f) = S^*(T(x))(f) = (T(x) \circ S)(f) =$

$= T(x)((f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}) =: \sum_{n=1} x_n f(e_n) =$

$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n f(e_n) = \lim_{m\to\infty} f(\sum_{n=1}^{m} x_n e_n) =$

$= f(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n e_n) = f(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n) = f(x) = \tau(x)(f)$

Άρα, τ ισομετρικός ισομορφισμός $\Rightarrow$ τ επί

Άρα $\ell^p(\mathbb{N})$ αυτοπαθής.

Άσκηση

Έστωσαν X, Y νορμικοί χώροι

α) Αν X εμφυτεύεται ισομορφικά στον Y και ο Y^* είναι διαχωρίσιμος τότε και ο X^* είναι διαχωρίσιμος

β) Αν $\ell^1(\mathbb{N})$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον X τότε Y^* μη διαχωρ.

γ) Ο $\ell^1(\mathbb{N})$ δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $c_0(\mathbb{N})$ (αν και ο $\ell^1(\mathbb{N}) \subseteq c_0(\mathbb{N})$)

ΛΥΣΗ

α) $\exists\, T: X \to Y$ ισομορφική εμφύτευση τότε όπως έχουμε αποδείξει ο T^* είναι επί $(T^*: Y^* \to X^*)$ άρα ο X^* είναι συνεχής εικόνα του Y^* διαχωρίσιμου χώρου $\Rightarrow$ X^* διαχωρίσιμος

β) Αν $\ell^1(\mathbb{N})$ εμφυτεύεται ισομορφικά στον X τότε από το (α) αν X^* διαχωρίσιμος τότε $\ell^1(\mathbb{N})^*$ διαχωρίσιμος πράγμα άτοπο (καθώς $\ell^1(\mathbb{N})^* \sim \ell^\infty(\mathbb{N})$ μη διαχωρίσιμος)

Άρα, X^* μη διαχωρίσιμος

γ) Αν ο $(\ell_1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ εμφυτευόταν ισομορφικά στον $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ τότε βάσει του β) $c_0(\mathbb{N})^*$ θα ήταν μη διαχωρίσιμος χώρος, άτοπο (διότι $c_0(\mathbb{N})^*$ ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^1(\mathbb{N})$ όπου είναι διαχωρίσιμος)

Άρα, $\ell^1(\mathbb{N})$ δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον $c_0(\mathbb{N})$

Άσκηση

Έστω X νορμικός χώρος και Y υπόχωρος του X ($Y \leq X$) και $x \in X$.

ΝΔΟ $d(x, Y) = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1, Y \subset \ker f\}$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $\underbrace{f \in X^*}$: $\|f\| \leq 1$ με $Y \subset \ker f$

έχουμε: $|f(x)| = |f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq \underbrace{\|f\|}_{1} \|x-y\|$

$\leq \|x-y\|, \ \forall y \in Y$

Άρα, $|f(x)|$ κ.φ. του $\{\|x-y\| : y \in Y\}$

$\Rightarrow \underbrace{|f(x)| \leq \inf\{\|x-y\|, y \in Y\} = d(x, Y)}$

Άρα, το $d(x, Y)$ α.φ. του $\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1, Y \subset \ker f\}$

Δηλαδή, $\sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1, Y \subset \ker f\} \leq d(x, Y)$

Αντίστροφα,

αν $x \in \overline{Y} \Rightarrow d(x, Y) = 0 = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1, Y \subset \ker f\}$ $\quad \overline{Y} \subset \ker f = \ker f$

αν $x \notin \overline{Y} \Rightarrow$ πόρισμα Hahn-Banach $\longrightarrow \exists f \in X^* : \|f\| = 1$ με $f|_{\overline{Y}} = 0$ $\quad Y \subset \ker f$

με $f(x) = d(x, \overline{Y}) = d(x, Y) \Rightarrow d(x, Y) \leq \sup\{|f(x)| : \dots\}$.

Είχαμε πριν πολύ καιρό αποδείξει ότι

για X, Y νορμικοί και Y Banach $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ χώρος Banach. Τώρα, θα δείξαμε το αντίστροφο.

Άσκηση

Έστωσαν X, Y νορμικοί με $X \neq \{0\}$.
Αν $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach
τότε και ο Y είναι Banach χώρος.

ΛΥΣΗ

Έστω βασική ακολουθία στον Y, έστω αυτή $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Θέλω αυτή η $(y_n)_{n\in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα στον Y
Επιλέγουμε τυχαίο $x_0 \in X$ και από το Πόρισμα του
Θεωρήματος Hahn-Banach $\exists f \in X^* : \|f\| = 1$
ώστε $f(x_0) = \|x_0\| = 1$
Ορίζουμε $T_n : X \to Y$
$T_n(x) = f(x)\cdot y_n \quad , \forall x\in X, \forall n \in \mathbb{N}$
γραμμικοί (προφανώς από τη γραμμικότητα της f)
συνεχής αφού $\forall x \in X$:
$\|T_n(x)\| = \|f(x)\cdot y_n\| = |f(x)|\cdot\|y_n\| \le$
$\le \underbrace{\|f\|}_{1}\cdot\|x\|\cdot\|y_n\| = \|y_n\|\cdot\|x\|$ ($\Rightarrow$ T φραγμένος)

Επομένως $T_n \in B(X,Y)$
$\forall n,m\in\mathbb{N}, \forall x\in X$
$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|f(x)y_n - f(x)y_m\| =$
$= |f(x)|\cdot\|y_n-y_m\| \le \underbrace{\|f\|}_{1}\|x\|\,\|y_n-y_m\| = \|y_n-y_m\|\,\|x\|$

Άρα, $\|T_n - T_m\| \le \|y_n - y_m\| \quad \forall m,n\in\mathbb{N}$
και αφού y_n βασική $\Rightarrow$ T_n βασική $\xRightarrow[\text{Banach}]{B(X,Y)}$ T_n είναι
συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists T\in B(X,Y)$: $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$
Συνεπώς, η T_n θα συγκλίνει και κατά σημείο. Άρα, $T_n(x_0) \longrightarrow T(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0)y_n = \|x_0\|y_n = y_n \longrightarrow T(x_0)$
Άρα, η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα και άρα
Y χώρος Banach